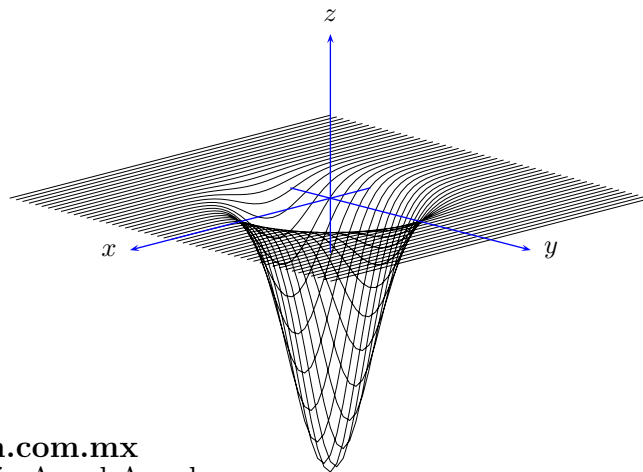


**MathCon**  
*The Mathematics Firm*

# Aplicaciones en GPS



[www.math.com.mx](http://www.math.com.mx)  
José de Jesús Angel Angel  
[jjaa@math.com.mx](mailto:jjaa@math.com.mx)  
MathCon © 2007-2011

# Contenido

<b>1. GPS</b>	<b>2</b>
1.1. Introducción . . . . .	2
1.1.1. Ejemplo . . . . .	2
1.2. Ejercicios . . . . .	4

# Capítulo 1

## GPS

### 1.1. Introducción

GPS significa sistema de posicionamiento global (Global Positioning System), es usado principalmente para ubicar posiciones en la tierra. Este sistema usa satélites para ubicar la posición de un blanco en la tierra.

La idea básica del funcionamiento del GPS es encontrar un punto  $P = (x, y, z)$  en la tierra en un tiempo  $t$ . Si se conoce la distancia  $d_i$  de ese punto a varios satélites (4), las distancias  $d_i$  se establecen conociendo el tiempo que tardan las señales de radio del satélite  $S_i$  al punto  $P$ . Además si se conoce la ubicación exacta de los satélites, es posible determinar el punto  $P$ .

Se supone por facilidad que la tierra esta determinada por la ecuación  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , es decir la unidad de medida son radios de la tierra. También suponemos que la velocidad de las señales de radio es de  $4,7 \text{ radii}$  (radios de la tierra) por décimas de segundo.

#### 1.1.1. Ejemplo

Supongamos que un coche es robado, pero cuenta con un dispositivo GPS, entonces se solicita a la empresa proveedora del sistema que localize el auto. La empresa cuenta con la ayuda de 4 satélites para encontrar el coche.

##### **Solución**

Los datos arrojados por los satélites son:

Satélite	Posición	Tiempo
1	(2,6871, 0,997843, 0,808889)	5,44013
2	(1,28081, 1,66812, 1,05613)	5,63532
3	(0,754194, 2,66006, 0,695377)	5,49932
4	(0,534611, 0,945304, 0,693213)	5,84649

Ahora la distancia del punto  $(x, y, z)$  y el satélite 1 es  $d_1 = 4,7(t - 5,44013)$ , (donde  $t$  es el tiempo de llegada y 5,44013 es el tiempo de partida), que también puede determinarse por  $d_1 = \sqrt{(x - 2,6871)^2 + (y - 0,997843)^2 + (z - 0,808889)^2}$ . Igualando las ecuaciones obtenemos:

$$(x - 2,6871)^2 + (y - 0,997843)^2 + (z - 0,808889)^2 = (4,7(t - 5,44013))^2 \quad (1.1)$$

desarrollando:

$$0 = -644,884 + 240,345t - 22,09t^2 - 5,3742x + x^2 - 1,99569y + y^2 - 1,61778z + z^2$$

Realizando lo mismo para los otros satélites, obtenemos:

$$\begin{aligned} 5,3742x + 1,99569y + 1,61778z - 240,345t &= x^2 + y^2 + z^2 - 22,09t^2 - 644,884 \\ 2,56163x + 3,33623y + 2,11227z - 248,968t &= x^2 + y^2 + z^2 - 22,09t^2 - 695,97 \\ 1,50839x + 5,32013y + 1,39075z - 242,96t &= x^2 + y^2 + z^2 - 22,09t^2 - 659,929 \\ 1,06922x + 1,89061y + 1,38643z - 258,298t &= x^2 + y^2 + z^2 - 22,09t^2 - 753,409 \end{aligned}$$

Si restamos la primera de cada una de las tres restantes, obtenemos:

$$\begin{aligned} -2,81257x + 1,34055y + 0,494492z - 8,62333t &= -51,0856 \\ -3,86581x + 3,32444y - 0,227022z - 2,61485t &= -15,0447 \\ -4,30497x - 0,105079y - 0,231352z - 17,953t &= -108,525 \end{aligned}$$

De donde se obtiene resolviendo el sistema, con la variable libre  $t$ .

$$\begin{aligned} x &= 25,7874 - 4,27676t \\ y &= 23,9826 - 3,92947t \\ z &= -21,6519 + 3,76606t \end{aligned}$$

Ahora podemos sustituir en la ecuación (1,1).

$$(x - 2,6871)^2 + (y - 0,997843)^2 + (z - 0,808889)^2 = (4,7(t - 5,44013))^2 \quad (1.2)$$

Desarrollando obtenemos:

$$912,654 - 307,057t + 25,8247t^2 = 0 \quad (1.3)$$

Resolviendo la ecuación para  $t$ , logramos el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}t_1 &= 5,89007 \\t_2 &= 6\end{aligned}$$

Ahora, sustituimos ambos valores, en las ecuaciones para  $x, y, z$  obteniendo:

$$\begin{aligned}x_{t_1} &= 0,596924 \\y_{t_1} &= 0,837725 \\z_{t_1} &= 0,53044\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{t_2} &= 0,126786 \\y_{t_2} &= 0,405764 \\z_{t_2} &= 0,944437\end{aligned}$$

Para poder decidir que valores son los correctos, verificamos ahora que conjunto de valores pertenecen a un punto en la superficie terrestre, es decir, si están en la esfera con radio 1.

Como,  $x_{t_1}^2 + y_{t_1}^2 + z_{t_1}^2 = 1,33947$ , y  $x_{t_2}^2 + y_{t_2}^2 + z_{t_2}^2 = 1,07268$ , podemos afirmar con un pequeño margen de error que las coordenadas correctas del auto robado en el tiempo  $t = 6$  son:

$$\begin{aligned}x &= 0,126786 \\y &= 0,405764 \\z &= 0,944437\end{aligned}$$

## 1.2. Ejercicios

1. Un excursionista esta perdido en un bosque, pero tiene un dispositivo GPS, al iniciarlo se obtienen los siguientes datos:

Satélite	Posición	Tiempo
1	(1.95456, 1.72328, 0.580083)	36,5946
2	(1.26142, 1.23289, 1.25014)	36,692
3	(1.61222, 2.3943, 0.538768)	36,5709
4	(1.515, 2.43419, 0.599708)	36,5762

Encontrar la ubicación del excursionista

Sol:  $t = 37, (0,251108, 0,932938, 0,258015)$

2. Un empresario del transporte quiere conocer la ubicación de una de sus unidades que tienen un dispositivo GPS, al activarlo se obtienen los siguientes datos:

Satélite	Posición	Tiempo
1	(1.37811, 2.40965, 0.826757)	16,4717
2	(0.637932, 1.32333, 2.58917)	16,5721
3	(1.11962, 2.17206, 0.891593)	16,5432
4	(1.51895, 1.02577, 1.68003)	16,6277

Encontrar la ubicación de la unidad

Sol:  $t = 17, (0,114519, 0,275773, 0,954377)$

3. Un ejecutivo no llega a una junta importante y no contesta las llamadas, pero tiene activado un dispositivo GPS, para saber si esta en camino los directivos de su empresa activan su localizador obteniendo los siguientes datos:

Satélite	Posición	Tiempo
1	(0.539902, 2.19469, 0.515066)	5,57658
2	(2.45447, 0.975447, 0.980592)	5,60392
3	(1.85353, 1.17735, 1.9077)	5,58193
4	(0.720784, 1.60063, 1.85784)	5,59462

Encontrar las coordenadas del ejecutivo

Sol:  $t = 6, (0,808505, 0,223069, 0,544573)$

4. Una mascota se pierde, pero tiene un dispositivo GPS, al encender tal dispositivo se obtienen los siguientes datos:

Satélite	Posición	Tiempo
1	(1.9975, 0.520202, 1.95371)	10,5166
2	( 0.520811, 1.0911, 1.44409)	10,7481
3	(1.95991, 1.00399, 0.691907)	10,6717
4	(0.936643, 0.583767, 2.19417)	10,5803

Encontrar a la mascota

Sol:  $t = 11, (0,480309, 0,827497, 0,290777)$

5. Para monitorear un cargamento importante que viaja al norte del país, se le proveyó de un dispositivo GPS, en un tiempo  $t$  se obtienen los siguientes datos :

Satélite	Posición	Tiempo
1	(0.858612, 1.82128, 0.917149)	0,657103
2	(1.46621, 1.29383, 0.934071)	0,705031
3	(1.26943, 2.20292, 0.965437)	0,555515
4	(1.91226, 1.68888, 1.3802)	0,561975

Encontrar la ubicación del cargamento en ese tiempo

Sol:  $t = 1, (0,578598, 0,24016, 0,779453)$