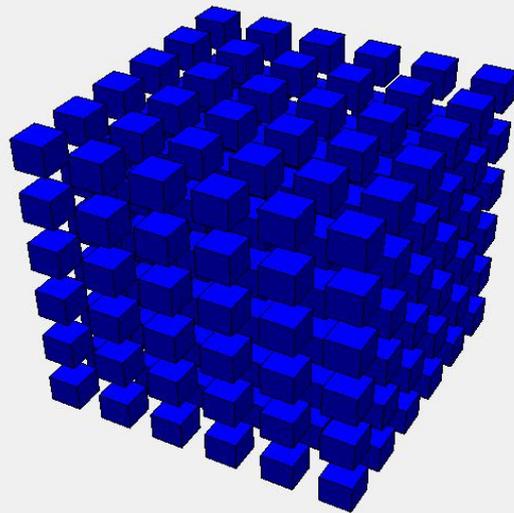


MathCon

The Mathematics Firm

Formas Cuadráticas

Representación gráfica de formas cuadráticas



www.math.com.mx

José de Jesús Angel Angel
jjaa@math.com.mx

MathCon © 2007-2011

Contenido

| | |
|--|----------|
| 1. Formas Cuadráticas | 2 |
| 1.1. Introducción | 2 |
| 1.2. Formas cuadráticas básicas | 3 |
| 1.2.1. Paraboloides | 3 |
| 1.2.2. Paraboloides hiperbólicos | 4 |

Capítulo 1

Formas Cuadráticas

1.1. Introducción

Definición 1 Una matriz cuadrada A es simétrica si $A^T = A$.

Definición 2 Una matriz no singular P es ortogonal si $P^{-1} = P^T$.

Las formas cuadráticas son las funciones más complejas después de las lineales. Una forma cuadrática en \mathbb{R}^n puede ser representada por una matriz simétrica A como:

$$Q(x) = x^T A x, x \in \mathbb{R}^n$$

Definición 3 1. Una forma cuadrática se llama definida positiva si $f(x) > 0$ para toda $x \neq 0$.

2. Una forma cuadrática se llama semidefinida positiva si $f(x) \geq 0$ para toda x .

3. Una forma cuadrática se llama definida negativa si $f(x) < 0$ para toda $x \neq 0$.

4. Una forma cuadrática se llama semidefinida negativa si $f(x) \leq 0$ para toda x .

5. Una forma cuadrática se llama indefinida si $f(x)$ toma valores positivos y negativos.

Definición 4 1. Una matriz simétrica se denomina definida positiva si la forma cuadrática f es definida positiva.

2. Una matriz simétrica se denomina semidefinida positiva si la forma cuadrática f es semidefinida positiva.

3. Una matriz simétrica se denomina definida negativa si la forma cuadrática f es definida negativa.

4. Una matriz simétrica se denomina semidefinida negativa si la forma cuadrática f es semidefinida negativa.

5. Una matriz simétrica se denomina indefinida si la forma cuadrática f es indefinida.

Teorema 1 Sea A una matriz simétrica $n \times n$, la forma cuadrática $f(x) = x^T A x$ es:

1. definida positiva si y sólo si todos los valores propios de A son positivos.

2. semidefinida positiva si y sólo si todos los valores propios de A son no negativos.

3. definida negativa si y sólo si todos los valores propios de A son negativos.

4. semidefinida negativa si y sólo si todos los valores propios de A son no positivos.

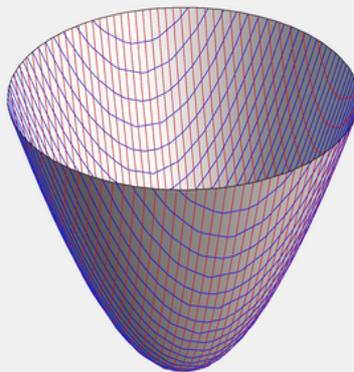
5. indefinida si y sólo si A tiene valores propios tanto positivos, como negativos.

1.2. Formas cuadráticas básicas

1.2.1. Paraboloides

1. La expresión cuadrática que se obtiene de la forma cuadrática

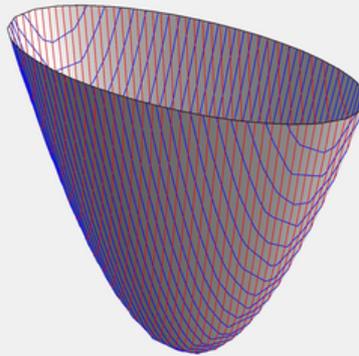
$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$$



Para cada constante $c > 0$ tenemos que $x^2 + y^2 = c$ es un círculo.

2. La expresión cuadrática que se obtiene de la forma cuadrática

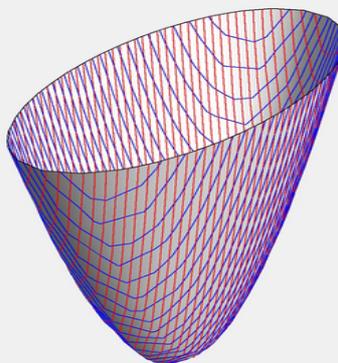
$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 5y^2$$



Para cada constante $c > 0$ tenemos que $x^2 + 5y^2 = c$ es una elipse.

3. La expresión cuadrática que se obtiene de la forma cuadrática

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5x^2 + y^2$$



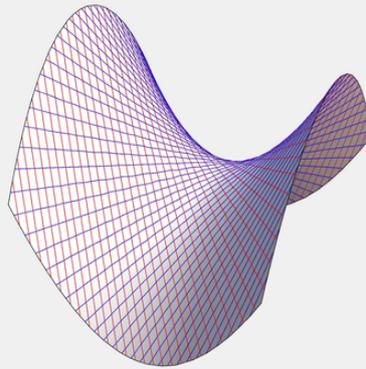
Para cada constante $c > 0$ tenemos que $5x^2 + y^2 = c$ es una elipse.

1.2.2. Paraboloide hiperbólico



1. La expresión cuadrática que se obtiene de la forma cuadrática

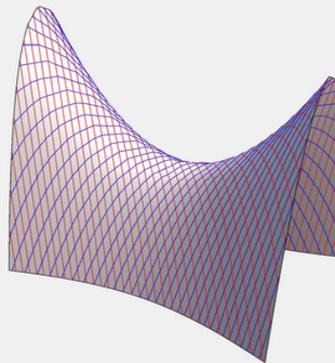
$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 - y^2$$



Para cada constante $c > 0$ tenemos que $x^2 - y^2 = c$ es una hipérbola.

2. La expresión cuadrática que se obtiene de la forma cuadrática

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 - 5y^2$$



3. La expresión cuadrática que se obtiene de la forma cuadrática

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -5x^2 + y^2$$

